بارت برادن

تصویر هندسی پولیا از انتگرالهای مرزی مختلط •*

ترجمهٔ امیر اکبری مجدآبادنو

انتگرالهای مرزی مختلط را هالهای از رمز و راز پوشانیده که ازدوران دانشجویی همواره مرا به‌خود مشغول کرده است. جان کلام درسخن چرچیل و براون [۲] آمده است: "انتگرال معین درحساب دیفرانسیل وانتگرال را می‌توان به‌عنوان مساحت تعبیر کرد، و نیز تعبیرهای دیگری برای آن وجود دارد. اما برای انتگرال درصفحهٔ مختلط، به جز در موارد خاص، تعبیرمفید هندسی یا فیزیکی مشابهی دردست نیست." در ۱۹۷۴، ژرژ پولیا پاسخی ساده برای این مسئله پیشنهاد کرد، اما به نظر نمی‌رسدکه ایدهٔ او آنقدرها مورد توجه قرارگرفته باشد. باپیروی ازاین رهیافت پولیا، می‌توان به‌کمك روشهای‌گرافیك‌کامپیوتری دانشجویان را درتجسم وتخمین انتگرالهای مختلط یاری کرد.

درنظریهٔ پتانسیل‌کلاسیك مرسوم است‌که به‌تابع حقیقی‌همساز $u(x,y)$ یك "پتانسیل مختلط" $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ نسبت دهند،که درآن $v(x,y)$ مزدوج همساز $u(x,y)$ است. دراین صورت بخشهای حقیقی و موهومی $\overline{f'(z)}$ مؤلفه‌های میدان‌گرادیان $\langle u_x(x,y),u_y(x,y)\rangle$ متناظر با پتانسیل $u(x,y)$ اند. ایدهٔ پولیا به‌سادگی این بود: به‌هرتابع مختلط $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ به‌جای میدان مشتق $\overline{f'(x+iy)}$، میدان برداری صفحه‌ای $\overline{f(x+iy)}=\langle u(x,y),-v(x,y)\rangle$ را نسبت دهید. در [۳] نشان داده شده است‌که انتگرالهای مختلط با انتگرالدهٔ $f(z)$ تعبیر هندسی و فیزیکی ساده‌ای برحسب میدان برداری نظیر $\overline{f(x+iy)}$ دارند. تحقق این واقعیت مسرت‌بخش، هدف این مقاله است، و ما نشان خواهیم دادکه تصویر میدان برداری می‌تواند به منظور تخمین انتگرالهای مرزی خاص‌به‌کاررود و به‌چشم‌اندازجدیدی درنظریهٔ انتگرالگیری مختلط

• Braden, Bart., "Pólya's geometric picture of complex contour integrals," *Mathematics Magazine*, **60** (1987) 321-327.

★ این‌مقاله از طرف‌جامعهٔ ریاضی امریکا(MAA)درسال ۱۹۸۸ برندهٔ جایزهٔ "کارل آلندورفر" شده است.

بیانجامد. دریك مقالهٔ پیش [۱] برمفید بودن تصویرمیدان برداری توابع مختلط (به‌عنوان جانشینی برای دیدگاه سنتی نسبت به یك تابع به عنوان نگاشتی از صفحهٔ مختلط) در تحلیل صفرها و نقاط تکین آنها تأکیدکرده‌ایم.

برای تأکید برتمایز بین یك تابع مختلط ومیدان برداری وابسته به‌آن، از این پس میدان برداری پولیای نظیر تابع مختلط $f(z)$ را با $\overline{\mathbf{W}}(z)$ یا $\overline{\mathbf{W}}(x,y)$ نشان می‌دهیم. بنابراین اگر $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ تجزیهٔ $f(z)$ به قسمتهای حقیقی و موهومی‌اش باشد، آنگاه $\overline{\mathbf{W}}(x,y) = \langle w_1(x,y)\ ,\ w_2(x,y)\rangle$ که $w_1 = u$ و $w_2 = -v$.

انتگرال f روی‌خم جهتدار γ را می‌توان برحسب انتگرالهای حقیقی مؤلفه‌های $\overline{\mathbf{W}}$ درامتداد γ نوشت:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy$$

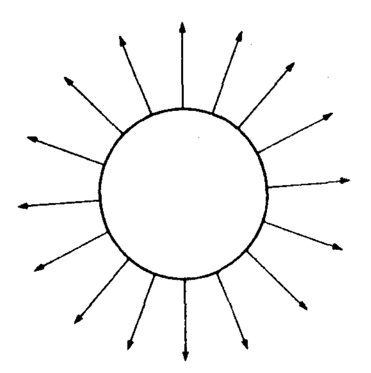
$$= \int_\gamma w_1 dx + w_2 dy + i\int_\gamma w_1 dy - w_2 dx$$

$$= \int_\gamma \overline{\mathbf{W}}\cdot\mathbf{T}\, ds + i\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}\cdot\mathbf{N}\, ds,$$

که در آن $\mathbf{N}$ بردارقائمی است که باچرخش بردارمماس واحد $\mathbf{T}$ درجهت حرکت عقربه‌های ساعت به‌اندازهٔ $\pi/2$ بدست می‌آید. درقالب عبارات، بخش حقیقی $\int_\gamma f(z)\,dz$ انتگرال مؤلفهٔ مماسی میدان برداری پولیا $\overline{\mathbf{W}}$ روی γ (یعنی جریان در امتداد γ، اگر $\overline{\mathbf{W}}$ را به عنوان یك میدان سرعت تصورکنیم)، و بخش موهومی $\int_\gamma f(z)\,dz$ انتگرال مؤلفهٔ قائم $\overline{\mathbf{W}}$ روی γ (شار گذرنده از γ) است. یك ره‌آوردآنی این تعبیر هندسی این است که به وضوح نشان می‌دهدکه مقدار یك‌انتگرال مرزی مستقل از پارامتری‌سازی است، واگر جهت خم برعکس شود تغییرعلامت می‌دهد.

درست همان‌طوری‌که می‌توانیم انتگرال‌حقیقی $\int_a^b f(x)\,dx$ را باتعبیر آن به‌عنوان مساحت علامت‌دار بین نمودار f وفاصلهٔ $[a,b]$ برمحور x تخمین بزنیم، انتگرال مختلط $\int_\gamma f(z)\,dz$ را می‌توانیم به طور غیردقیق با براورد بصری جریان وشار میدان برداری پولیا $\overline{\mathbf{W}}$ در امتداد مسیر، تقریب بزنیم.

به عنوان مثال، درشکل ۱، میدان برداری $\overline{\mathbf{W}}$ برای تابع $f(z) = 1/z$ در امتداد دایرهٔ واحد نشان داده شده است. بردار $\overline{\mathbf{W}}(z)$ درهرنقطهٔ z بدمسیر عمود است، بنابراین جریان $\overline{\mathbf{W}}$ در امتداد مرز انتگرالگیری صفر است. همان طورکه دیده می‌شود مؤلفهٔ قائم $\overline{\mathbf{W}}$ برابر مقداری ثابت یعنی ۱، است. بنابراین شار $\overline{\mathbf{W}}$ گذرنده ازمسیر به سادگی برابر حاصل ضرب این مقدار ثابت درطول مسیر، یعنی 2π، خواهد بود. پس تحلیل هندسی ما



شکل ۱. میدان برداری پولیا برای $f(z)=1/z$ روی دایرهٔ واحد.

نشان می‌دهدکه $\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$

البته مثالی که هم‌اکنون مورد بررسی قرارگرفت خیلی خاص‌است؛ درحالت‌کلی‌فقط می‌توانیم انتگرال مؤلفه‌های مماس و قائم $\mathbf{W}$ روی γ را از روی شکل میدان برداری در امتداد این مسیر تخمین بزنیم. برای این‌که بر تشابه فرایند تخمین‌انتگرالهای‌مختلط با‌تخمین انتگرالهای حقیقی تأکید بورزیم، فرایند اخیر را به اختصار یادآوری می‌کنیم و در این میان از خواننده می‌خواهیم اندکی قوهٔ اغماض خود را به‌کارگیرد.

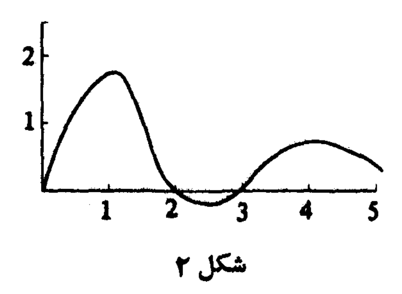
روشن است که برای براورد $\int_a^b f(x)\,dx$ ازروی نمودار f روی $[a,b]$، سطح بین این نمودار و محور x را تخمین می‌زنیم و مساحت زیر محور x را از مساحت بالای محورکم‌می‌کنیم. به‌بیان دقیقتر، می‌توانیم به‌طورذهنی‌افراز $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ را طوری در نظر بگیریم‌که علامت $f(x)$ درهر زیر بازهٔ‌آن تغییر نکند؛ سپس هر یك از انتگرالهای $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$ را تخمین بزنیم . و اعداد علامتدار حاصل را با هم جمع کنیم. برای براورد سطح بین نمودار ومحور x روی هرزیر بازهٔ $[x_k\,,\,x_{k+1}]$، ارتفاع میانگین $\bar{y}_k$ نمودار را روی این زیر بازه تخمین می‌زنیم و حاصلضرب $\bar{y}_k\,(x_{k+1}-x_k)$ را به‌عنوان تقریبمان ازمساحت به‌کارمی‌بریم.

به‌عنوان‌مثال این فرایند ذهنی برای براورد $\int_0^5 f(x)\,dx$ برای تابعی‌که نمودارش درشکل ۲ رسم شده است، می‌تواند چیزی شبیه به این باشد: افراز $0<2<3<5$ را درنظر می‌گیریم؛

$$\int_{0}^{2} f(x)dx \cong (1/1)(2-0) \qquad \int_{2}^{3} f(x)dx \cong (-0/1)(3-2) \ ,$$

$$\int_{3}^{5} f(x)dx \cong (0/7)(5-3) \ ,$$

بنابراین ۳٫۵ = ۲٫۴ + ۱٫۰ − ۲٫۲ = $\int_0^5 f(x)\,dx$. اگر محاسبه‌ای تحلیلی مقدار بسیار متفاوتی برای این انتگرال، مثلا ۳ − ، را به‌دست دهد، متوجه می‌شویم که اشتباهی در محاسبه رخ داده است؛ آنچه که این تخمین هندسی را بسیار متقاعدکننده می‌سازد، سادگی آن است.

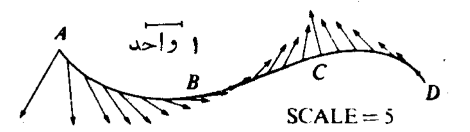


شکل ۲

تعبیر انتگرالهای مختلط به وسیلهٔ میدان برداری را می‌توان به روش مشابهی برای دستیابی به تخمین ساده‌ای برمبنای شهود هندسی به‌کار بست، که دراین صورت می‌تواند به عنوان آزمونی درمقابل روشهای تحلیلی تلقی شود.

برای براورد $\int_\gamma f(z)\,dz$ ، باید بخش حقیقی‌اش ، $\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}.\mathbf{T}\,ds$ ، و بخش موهومی‌اش، $\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}.\mathbf{N}\,ds$ ، را جداگانه تخمین بزنیم. برای تخمین $\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}.\mathbf{T}\,ds$ ، ابتدا خم را به‌قطعه‌های $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ که روی هریك ازآنها $\overline{\mathbf{W}}.\mathbf{T}$ علامت ثابت دارد افراز می‌کنیم (یادآوری می‌کنیم که برای مثبت بودن $\overline{\mathbf{W}}.\mathbf{T}$ تنها کافی است که زاویهٔ بین $\overline{\mathbf{W}}$ و $\mathbf{T}$ حاده باشد). آنگاه برهرقطعهٔ γ_k به‌طور بصری مؤلفهٔ مماسی متوسط $\overline{\mathbf{W}}$، یعنی τ_k، را تقریب می‌زنیم، به‌طوری‌که $\tau_k l_k \cong \int_{\gamma_k} \overline{\mathbf{W}}.\mathbf{T}\,ds$، که درآن l_k نشانگر طول γ_k است. درعمل نمودار $\overline{\mathbf{W}}$ در امتداد γ مقیاس‌بندی می‌شود، یعنی ضریبی چون SCALE وجود دارد به‌طوری‌که برداری بااندازهٔ ظاهری ۱ درنمودار،برداری‌را در $\mathbf{C}$ درهمان‌جهت‌اما با اندازه‌ای برابر SCALE نمایش می‌دهد. بنابراین اگر τ_k اندازهٔ ظاهری مؤلفهٔ مماسی متوسط$\overline{\mathbf{W}}$درامتدادقطعه‌خم γ_k را نشان‌دهد،آنگاه $\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}.\mathbf{T}ds \cong \text{SCALE} \sum_{k=1}^{n} \tau_k l_k$. فرایند تخمین $\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}.\mathbf{N}\,ds$ مشابه است.

مثال ۱. اگر شکل $\overline{\mathbf{W}}$ در امتداد γ همان طور باشدکه درشکل ۳ نشان داده شده است، می‌توانیم برای تخمین $\int_\gamma f(z)\,dz$ چنین استدلال کنیم.



شکل ۳

روی قطعهٔ AC زاویهٔ بین $\overline{\mathbf{W}}$ و $\mathbf{T}$ حاده است. بنابراین مؤلفهٔ مماسی $\overline{\mathbf{W}}$ روی این قطعه مثبت است. در A اندازهٔ (ظاهری) $\overline{\mathbf{W}}$ در حدود ۲ واحد، و اندازهٔ مؤلفهٔ مماسی (تصویر $\overline{\mathbf{W}}$ بر روی خط مماس) در حدود ۱ر۵ واحد است. اندازهٔ بردار $\overline{\mathbf{W}}$ با حرکت به‌سمت B کاهش می‌یابد، اما درعوض بیشتر و بیشتر به‌موازات $\mathbf{T}$ درمی‌آید، به‌طوری که مؤلفهٔ مماسی $\overline{\mathbf{W}}$ فقط در حدود ۰ر۵ واحد کاهش می‌یابد. اگر مؤلفهٔ مماسی متوسط $\overline{\mathbf{W}}$ را در طول این قطعه برابر ۱ واحد براورد کنیم، آنگاه از آنجا که طول خم AB در حدود ۵ واحد است، داریم $\tau_1 l_1 \cong (۱)(۵) = ۵$. از B تا C اندازهٔ بردار $\overline{\mathbf{W}}$ زیاد می‌شود، اما مؤلفهٔ مماسی روی BC از ۰ر۵ در B به ۰ در C کاهش می‌یابد. با استفاده از تخمین $\tau_2 \cong ۰ر۳$ برای مؤلفهٔ مماسی متوسط روی BC، و تقریب ۳ واحد برای طول این قطعه، بدست می‌آوریم $\tau_2 l_2 \cong (۰ر۳)(۳) = ۰ر۹$. روی قطعهٔ CD مؤلفهٔ مماسی $\overline{\mathbf{W}}$ از ۰ شروع می‌شود، به مینیمم منفی در حدود ۰ر۲− می‌رسد، و سرانجام در D دوباره ۰ می‌شود. پس تخمین می‌زنیم $\tau_3 l_3 \cong (-۰ر۱)(۳) = -۰ر۳$، و از آنجا که ضریب مقیاس برای نمودار $\mathrm{SCALE} = ۵$ است، تخمین ما از $\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}\cdot\mathbf{T}\,ds$ برابر $۵(۵ + ۰ر۹ - ۰ر۳) = ۲۸$ خواهد بود. به روش مشابه با تخمین مؤلفهٔ قائم متوسط $\overline{\mathbf{W}}$ در امتداد AB، BC، و CD به ترتیب به صورت $\nu_1 \cong ۰ر۵$، $\nu_2 \cong -۰ر۴$، و $\nu_3 \cong -۰ر۵$ به دست می‌آوریم $\mathrm{SCALE}\sum \nu_k l_k \cong ۵[(۰ر۵)(۵) + (-۰ر۴)(۳) + (-۰ر۵)(۳)] = -۱$. بنابراین اگر $\overline{\mathbf{W}}$ میدان برداری پولیای تابعی مختلط چون $f(z)$ باشد، تقریب هندسی ما نشان می‌دهد که $\int_\gamma f(z)\,dz \cong ۲۸ - i$. ما نمی‌توانیم از علامت بخش موهومی $\int_\gamma \mathbf{W}\cdot\mathbf{N}\,ds$ مطمئن باشیم، زیرا خطاهایی کوچك در تقریب ν_k و l_k می‌تواند روی علامت مجموع تأثیر بگذارد، اما می‌توانیم با اطمینان بگوییم که جریان در امتداد γ مثبت (در حدود ۳۰)، و شار گذرنده از γ نزدیك به ۰ است. اگر محاسبه‌ای تحلیلی به نتیجه‌ای مثل $\int_\gamma f(z)\,dz = ۲\pi i$ بیانجامد، معقول خواهد بود که آن محاسبه را کنترل کنیم.

در یك درس مقدماتی آنالیز مختلط "کاربرد" اصلی انتگرالگیری مختلط محاسبهٔ برخی انتگرالهای حقیقی با استفاده از حساب مانده است. برای این کار معمولا بازهٔ حقیقی انتگرال‌گیری را به یك مرز بسته در صفحهٔ مختلط تکمیل می‌کنیم، قضیهٔ مانده را برای محاسبهٔ یك انتگرال مختلط مناسب روی این مرز به‌کار می‌بریم، و سپس سعی می‌کنیم سهمی را که در مجموع انتگرال در امتداد محور حقیقی x دارد، تعیین کنیم. گاهی مشاهدهٔ شکلی از میدان برداری پولیا

درامتداد مرز، می‌تواند روشن‌کنندهٔ این‌گام آخر باشد.(همچنین می‌توان مانده را در یک‌قطب ساده به‌طورهندسی تخمین زد، اما نشان دادن اینکه چگونه این‌کارممکن‌است ما را از زمینهٔ اصلی بحثمان دراینجا بسیار دور می‌کند.)

مثال ۲ . مقدار $I_1=\int_0^{\infty}\frac{1}{x^3+1}dx$ را محاسبه کنید.

درابتدا، قضیهٔ مانده را برای محاسبهٔ

$$I=\int_{\gamma}\frac{1}{z^3+1}dz\ ,\qquad \gamma=\gamma_1+\gamma_R+\gamma_2\ ,$$

به‌کارمی‌گیریم، که در آن γ_1 مسیرروی محور x ازمبدأ تا R، γ_R کمانی‌از دایره $|z|=R$ از R تا $Re^{2\pi i/3}$، و γ_2 قطعه خطی است‌که از $Re^{2\pi i/3}$ به مبدأ باز می‌گردد. داریم $I=2\pi i\ \mathrm{Res}(f,z_1)$، که در آن $f(z)=1/(z^3+1)$ و z_1 قطب سادهٔ f در $e^{\pi i/3}$ است. با محاسبه به‌دست می‌آوریم:

$$\mathrm{Res}(f,z_1)=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)=\frac{1}{\left[\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right](i\sqrt{3})}،$$

بنابراین

$$I=\pi\left[\frac{1}{\sqrt{3}}-i\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

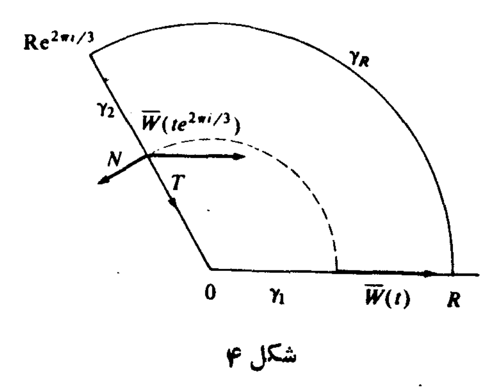
چون با افزایش $|z|$ ، $|f(z)|$ خیلی سریعتر از $1/|z^2|$ کاهش می‌یابد، $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}f(z)\,dz=0$. بنابراین از آنجا که مقدار I مستقل از R است، می‌توان نوشت $I=I_1+I_2$، که $I_2=\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}f(z)dz$.

اکنون توجه‌کنیم که مقدار z^3 در $z=t$ روی γ_1 با $z=t\,e^{2\pi i/3}$ روی γ_2 یکسان است، بنابراین بردارهای پولیای $\overline{\mathbf{W}}(t)$ و $\overline{\mathbf{W}}(t\,e^{2\pi i/3})$ مساوی‌اند. اما جهت $\overline{\mathbf{W}}(t)$ در امتداد مسیر γ_1 است، درحالی‌که $\overline{\mathbf{W}}(t\,e^{2\pi i/3})$ با بردار یکهٔ مماس بر γ_2 زاویهٔ $\pi/3$ می‌سازد (شکل ۴). بنابراین مؤلفهٔ مماسی $\overline{\mathbf{W}}(t\,e^{2\pi i/3})$ برابر

$$|\overline{\mathbf{W}}(t)|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}|\overline{\mathbf{W}}(t)|,$$

و مؤلفهٔ قائم برابرمقدار زیرخواهد بود

$$|\overline{\mathbf{W}}(t)|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}|\overline{\mathbf{W}}(t)|,$$



شکل ۴

پس

$$I_{۲} = \frac{۱}{۲} I_{۱} - i \frac{\sqrt{۳}}{۲} I_{۱} \qquad (*)$$

که در آن

$$I_{۱} = \int_{\circ}^{\infty} \frac{۱}{t^{۳}+۱}\, dt$$

بنابراین

$$I = I_{۱} + I_{۲} = \left(\frac{۳}{۲} - i \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) I_{۱}$$

و با مقایسهٔ این مقدار I که در بالا به کمك قضیهٔ مانده یافتیم، نتیجه می‌گیریم که $I_{۱} = ۲\pi/(۳\sqrt{۳})$. بحث ما تنها در یك اصل با محاسبهٔ تحلیلی معمولی I فرق دارد: استدلال هندسی ما، به‌جای پارامتری‌سازی $\gamma_{۱}$ و به‌دست آوردن معادلهٔ $(*)$ با روشهای تحلیلی، از تجزیهٔ $\overline{W}(t\,e^{۲\pi i/۳})$ به مؤلفه‌های مماس و قائم برای به‌دست آوردن این رابطه بین $I_{۲}$ و $I_{۱}$ بهره می‌برد.

نگرش میدان برداری به انتگرالهای مختلط، علاوه بر روشنگری در تحلیل انتگرالهای خاص، و پر توافکنی تازه‌ای بر خواص آشنای توابع مختلط، می‌تواند به نتایج نظری جدیدی منجر شود. در تخمین انتگرالهای مختلط نامساوی $|\int_{\gamma} f(z)\,dz| \leqslant \int_{\gamma} |f(z)|\,ds$ اساسی است، اما به نظر نمی‌رسد که این نامساوی نامی مورد قبول عام داشته باشد. گاهی اوقات آن را، نامساوی مثلثی برای انتگرالهای مختلط می‌نامند، چرا که می‌توان آن را نتیجه‌ای از این حقیقت که قطعه خط راست کوتاهترین فاصلهٔ بین دو نقطه درصفحهٔ مختلط است، تلقی کرد. من تاکنون دربارهٔ شرایطی که تحت آنها درنامساوی مثلثی تساوی برقرار می‌شود چیزی درمنابع نیافته‌ام. به نظر می‌رسد دلیل این امر آن باشد که شرایط مناسب برحسب خواص

نگاشتی توابع مختلط براحتی قابل بیان نیست. اما از دیدگاه میدان برداری، شرط مطلوب به طرز زیبایی‌ساده‌است.توجه کنید که‌چون مقدار یك انتگرال مرزی، با تغییر مسیر انتگرال‌گیری به‌کمك یك دگردیسی پیوسته (که نقاط انتهایی را ثابت نگه دارد) درحوزهٔ تحلیلی بودن انتگرالده، عوض نمی‌شود، شرایط تساوی در نامساوی مثلثی هم به مرز γ و هم به انتگرالدهٔ $f(z)$ بستگی خواهد داشت.

قضیه: فرض‌کنید $f(z)$ یك‌تابع پیوستهٔ مختلط روی دامنه‌ای شامل‌کمان تکه‌ای‌مشتق‌پذیر γ باشد. در این صورت تساوی در نامساوی مثلثی، یعنی رابطهٔ

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right|=\int_\gamma |f(z)|\ ds$$

دقیقاً وقتی برقرار است‌که میدان برداری پولیای $\overline{\mathbf{W}}$ با میدان برداری مماس $\mathbf{T}$ درامتداد γ زاویه‌ای ثابت بسازد.

اثبات ما مبتنی بر لم ساده‌ای دربارهٔ قدرمطلق یك مجموع برداری ومشابه پیوسته‌اش برای انتگرالهای برداری است.

لم ۱. اگر $\mathbf{W}=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}_k$، آنگاه $|\mathbf{W}|=\sum_{k=1}^{n}|\mathbf{V}_k|\cos\theta_k$، که θ_k زاویهٔ بین $\mathbf{V}_k$ و $\mathbf{W}$ است. [در قالب عبارات، مجموع مؤلفه‌های جمعوندها در امتداد مجموع $\mathbf{W}$، قدر مطلق مجموع، یعنی $|\mathbf{W}|$، را به‌دست می‌دهد.]

برهان.

$$\sum_{k=1}^{n}|\mathbf{V}_k|\cos\theta_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbf{V}_k\cdot\mathbf{W}}{|\mathbf{W}|}=\frac{1}{|\mathbf{W}|}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}_k\cdot\mathbf{W}=\frac{1}{|\mathbf{W}|}\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}=|\mathbf{W}|$$

لم ۲. اگر $\mathbf{V}(t)$، $a\leqslant t\leqslant b$، تابع‌برداری پیوسته‌ای باشد، و $\mathbf{W}=\int_a^b\mathbf{V}(t)\,dt$، آنگاه $|\mathbf{W}|=\int_a^b|\mathbf{V}(t)|\cos\theta(t)\,dt$ که درآن $\theta(t)$ زاویهٔ بین $\mathbf{V}(t)$ و $\mathbf{W}$ است.

برهان. فرض‌کنید $R_k=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}(t_k)\,\Delta t$ نمایانگر یك تقریب مجموع ریمان $\mathbf{W}$ نسبت به‌افراز $[a,b]$ به n زیربازهٔ مساوی به‌طول $\Delta t=(b-a)/n$ باشد. با به‌کارگیری لم ۱ داریم $|R_n|=\sum_{k=1}^{n}|\mathbf{V}(t_k)|\cos\theta_k\Delta t$، که درآن θ_k زاویهٔ بین $\mathbf{V}(t_k)$ و R_n است. وقتی‌که $n\to\infty$، $R_n\to\mathbf{W}$، بنابراین به‌ازای هر $\varepsilon>0$ مفروض بااختیارکردن n به‌قدرکافی بزرگ‌می‌توانیم کاری کنیم که به‌ازای‌هر k، $|\cos\theta_k-\cos\theta(t_k)|<\dfrac{\varepsilon}{M(b-a)}$، که درآن $\theta(t_k)$ زاویهٔ بین $\mathbf{V}(t_k)$ و $\mathbf{W}$ است، و $M=\max\limits_{t\in[a,b]}|\mathrm{V}(t)|$. دراین‌صورت

$$\left|\sum_{k=1}^{n}|\mathbf{V}(t_k)|(\cos\theta_k-\cos\theta(t_k))\Delta t\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\mathbf{V}(t_k)|\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\Delta t$$

$$\leqslant nM\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\cdot\frac{b-a}{n}=\varepsilon$$

یعنی وقتی‌که $n\to\infty$، $\Sigma|\mathbf{V}(t_k)|\cos\theta_k\,\Delta t\to\Sigma|\mathbf{V}(t_k)|\cos\theta(t_k)\Delta t$. اما ازآنجا که $R_n\to\mathbf{W}$، سمت چپ به $|\mathbf{W}|$ میل می‌کند، وسمت راست یك تقریب مجموع ریمان $\int_a^b|\mathbf{V}(t)|\cos\theta(t)\,dt$ است. بنابراین همان‌طورکه ادعا شده بود

$$\mathbf{W}=\int_a^b|\mathbf{V}(t)|\cos\theta(t)\,dt$$

نتیجه. اگر $\mathbf{V}(t)$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد،آنگاه $\left|\int_a^b\mathbf{V}(t)\,dt\right|\leqslant\int_a^b|\mathbf{V}(t)|dt$، و تساوی دقیقاً وقتی برقرار است‌که $\mathbf{V}(t)$ زاویهٔ قطبی ثابتی داشته باشد.

برهان. اگر $\theta(t)$ زاویهٔ بین $\mathbf{V}(t)$ و $\mathbf{W}=\int_a^b\mathbf{V}(t)\,dt$ باشد، ازآنجاکه درطول $[a,b]$، $1-\cos\theta(t)\geqslant 0$، داریم $\int_a^b|\mathbf{V}(t)|\{1-\cos\theta(t)\}dt\geqslant 0$، و تساوی دقیقاً وقتی برقرار است‌که $\cos\theta(t)\equiv 1$. بنابراین بـا بـه‌کارگیری لـم ۲ داریـم، $\left|\int_a^b\mathbf{V}(t)\,dt\right|=|\mathbf{W}|=\int_a^b|\mathbf{V}(t)|\cos\theta(t)\,dt\leqslant\int_a^b|\mathbf{V}(t)|dt$، و تساوی درست وقتی برقرار است‌که زاویهٔ $\theta(t)$ بین $\mathbf{V}(t)$ و $\mathbf{W}$ صفر باشد،که این با این شرط هم‌ارز است‌که $\mathbf{V}(t)$ زاویهٔ قطبی ثابتی داشته باشد.

برهان قضیه.

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|=\left|\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt\right|\leqslant\int_a^b|f(z(t))|\;|z'(t)|dt$$
$$=\int_a^b|f(z)|\,ds,$$

وتساوی دقیقاً وقتی برقرار است‌که تابع برداری $f(z(t))\,z'(t)$ زاویهٔ قطبی ثابتی داشته باشد، امـا زاویـهٔ قطبی $f(z(t))\,z'(t)$ برابر $\arg f(z(t))+\arg z'(t)$ یـا $\arg z'(t)-\arg \overline{f(z(t))}$ است،که ما آن را به‌عنوان زاویهٔ بین بردارمماس برمسیر و بردار پولیای $\overline{\mathbf{W}}$ در $z(t)$ می‌شناسیم.

توجه‌کنیم که میدان برداری شعاعی $f(z)=1/z$ درشکل ۱، همان طورکه درقضیه خواسته شده، با میدان برداری مماس روی دایرهٔ $|z|=1$ زاویهٔ ثابت $\pi/2$ می‌سازد ودر واقع هم داریم

$$\left|\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\,dz\right|=\int_{|z|=1}\left|\frac{1}{z}\right|ds$$

که مقدار مشترك این دو 2π است. مثال دیگری‌که درآن فرض زاویهٔ ثابت برقرار است، انتگرال $\int_{\gamma_2}1/(z^3+1)\,dz$ است‌که در مثال ۲ بررسی شد؛ و این حقیقت‌که برای این انتگرال تساوی در نامساوی مثلثی برقرار است نتیجهٔ بدیهی معادلهٔ (*) درآن مثال است.

نظر به در دسترس بودن ریزکامپیوترهـایی با امکانات نیرومندگرافیکی، و افزایش تعداد دانشجویان‌آشنا با چنین سخت افزارهایی، می‌توان دریك دورهٔ مقدماتی‌آنالیزمختلط

تکالیفی کلاسی تدارک دیدکه بااستفاده ازتصاویرمیدان برداری پولیا سروکار داشته باشند. تجربه با یك چنین مدل هندسی، به خصوص در مطالعهٔ انتگرالگیری مرزی، می‌تواندکمك کند تا تصویر نامطلوبی راکه شنیدن واژهٔ «موهومی» درآنالیزمختلط مجسم می‌کنیم از یاد ببریم.

مراجع

1. Braden, Bart. 'Picturing functions of a complex variable," *College Math. J.*, **16** (1985) 63-72.
2. Churchill, Ruel V., and James W. Brown, *Complex Variables and Applications*, 4th ed., McGraw-Hill, 1984.
3. Polya, George, and Gordon Latta, *Complex Variables*, Wiley 1974.